2024年　東大数学　文系第1問 ①

準備 放物線C: $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 定義しました。

名前つけた 円 D: $x^2+y^2=1$

点 P: $(\cos\theta, \sin\theta)$

点 Q: $(-\cos\theta, \sin\theta)$　$0<\theta<90^\circ$

まずは、解法1〜2で、なるべく計算量が少なくなるように工夫した解法を紹介します。

STEP1: bの値を特定する

解法1-1. 点P,点Qを通る条件

点Pを通るので、$\sin\theta=f(\cos\theta) \Leftrightarrow \sin\theta=a\cos^2\theta+b\cos\theta+c$ ①

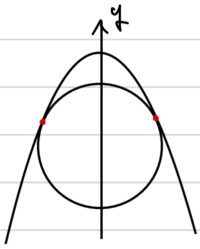
点Qを通るので、$\sin\theta=f(-\cos\theta) \Leftrightarrow \sin\theta=a\cos^2\theta-b\cos\theta+c$ ②

辺々引いて、$0=2b\cos\theta$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より $\cos\theta\neq0$ なので、$b=0$

解法1-2 対称性の利用

右図のように、与えられたグラフには y軸に関する対称性がある。



よって、放物線の軸はy軸であり

放物線Cは $y=f(x)=ax^2+c$ の形

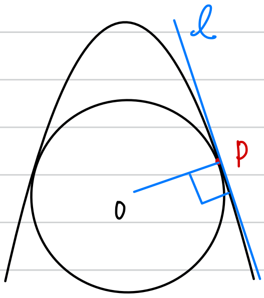
つまり、$b=0$

以下、コレを使う

STEP2: aを特定し、cを求める

解法2-1. 傾きの利用

点Pにおける接線lの傾きを考える。



$f'(x)=2ax$ なので、

lの傾きは、$2a\cos\theta$

また、OPの傾きが $\tan\theta$ なので、

lの傾きは OP⊥l より $-\frac{1}{\tan\theta}$　lの傾きを2通りで表した。

よって $2a\cos\theta=-\frac{1}{\tan\theta}$

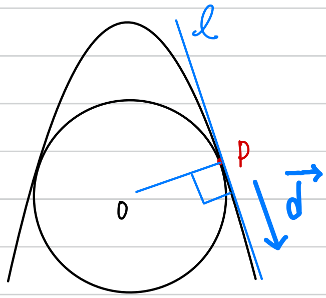
$a=-\frac{1}{2\cos\theta\cdot\tan\theta}$

$\therefore a=-\frac{1}{2\sin\theta}$　　$a=-\frac{1}{2s}$

①に代入して、$\sin\theta=-\frac{1}{2s}\cos^2\theta+0+c$

$\therefore c=\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)$ //

解法2-2. 方向ベクトル



接線lの傾きは $y'=2ax$ に点Pのx座標を代入して、$2a\cos x$

よって、lの方向ベクトルの1つを $\vec{d}$ とすると、

$\vec{d}=(1, 2a\cos\theta)$

$\overrightarrow{OP}=(\cos\theta, \sin\theta)$ であり

$\overrightarrow{OP}\perp\vec{d}$ なので、$\overrightarrow{OP}\cdot\vec{d}=0$

よって、$\cancel{\cos\theta}\times1+\sin\theta\times2a\cancel{\cos\theta}=0$

$a=-\frac{1}{2s}$　　あとは、2-1と同様に $c=\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)$

ここまでが(1)の最短の解法(多分)

他の解法は、下に紹介。接線の方程式や接する条件などを使うので、計算が増えます。

解法3-1. 放物線と円を連立(xを消去)

(b=0を求めたあとから。)

$\begin{cases} y=ax^2+c \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ を連立

$x^2=1-y^2$ を代入して、$y=a(1-y^2)+c$　$\therefore\ ay^2+y-a-c=0$ ③

円と放物線が ($y=\sin\theta$ で) 接するので、

$D: 1^2-4\cdot a\cdot(-a-c)=0$

$4a^2+4ac+1=0$ …④ ◀接する条件

③と④を連立。③⇔ $c=ay^2+y-a$ を代入し、

$4a^2+4a(ay^2+y-a)+1=0$

$4a^2y^2+4ay+1=0$

$(2ay+1)^2=0$　$y=-\frac{1}{2a}$ の重解

これが $\sin\theta=s$ なので、

$-\frac{1}{2a}=s$　$\therefore$　$a=-\frac{1}{2s}$

考察

この解法は アリなレベルの計算量だと思います。

解法3-2. 放物線と円を連立(yを消去)

(b=0を求めたあとから。)

$\begin{cases} y=ax^2+c \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ を連立

$y=ax^2+c$ を代入して、$x^2+(ax^2+c)^2=1$

$\therefore\ a^2x^4+(2ac+1)x^2+c^2-1=0$

$x=\cos\theta$ と $-\cos\theta$ で接するので、

$a^2(x-\cos\theta)^2(x+\cos\theta)^2=a^2(x^2-\cos^2\theta)^2$ となるはず。

$x^2=X$ としたときの(判別式)=0　　$(X-\cos^2\theta)^2$

Advice

円と放物線を連立する場合、yを消去(x残し)をすると、計算量が膨大になるので、オススメしません。↓証拠↓

2024年　東大数学　文系第1問②

$x^2 = X$ とおき

$a^2X^2 + (2ac+1)X + c^2 - 1 = 0$ …⑤

(判別式) $= (2ac+1)^2 - 4a^2(c^2-1) = 0$

$\cancel{4a^2c^2} + 4ac + 1 - \cancel{4a^2c^2} + 4a^2 = 0$

$4a^2 + 4ac + 1 = 0$ …⑥

⑤と⑥を連立すると、⑤が (　　　)$^2 = 0$ と変形できるはず。
闇雲に変形すると大変なので、方針を決める。

Cを消去する　とても面倒

⑤×2より　$2a^2X^2 + (4ac+2)X + 2(c^2-1) = 0$

⑥⇔ $4ac = -4a^2 - 1$ を代入して

$2a^2X^2 + (-4a^2+1)X + 2(c^2-1) = 0$　×8a²

$16a^4X^2 + (-32a^4+8a^2)X + 16a^2c^2 - 16a^2 = 0$

⑥を2乗し、$(4ac)^2 = (-4a^2-1)^2$

$16a^2c^2 = (-4a^2-1)^2$ を代入

$16a^4X^2 + (-32a^4+8a^2)X + (-4a^2-1)^2 - 16a^2 = 0$

$16a^4X^2 + (-32a^4+8a^2)X + (4a^2-1)^2 = 0$　計算した

$\{4a^2X - (4a^2-1)\}^2 = 0$　◀確かに2乗になった!!

∴ $X = \frac{4a^2-1}{4a^2}$

aとcが消しづらいので、両方残して1を消す　こっちの方が楽

$a^2X^2 + (2ac+1)X + c^2 - 1 = 0$ …⑤

⑥ $1 = -4a^2 - 4ac$ を代入

$a^2X^2 + (2ac - 4a^2 - 4ac)X + c^2 - (-4a^2 - 4ac) = 0$

$a^2X^2 + (-4a^2 - 2ac)X + 4a^2 + 4ac + c^2 = 0$

$a^2X^2 + (-4a^2 - 2ac)X + (2a+c)^2 = 0$

$\{aX - (2a+c)\}^2 = 0$　◀こっちも、ちゃんと2乗になった!!

∴ $X = \frac{2a+c}{a}$　このまま、続き。

$X = x^2 = \frac{2a+c}{a}$ で、接点は $x = \pm\cos\theta$ なので、

$(\pm\cos\theta)^2 = \frac{2a+c}{a}$　∴ $c = a\cos^2\theta - 2a$ …⑦

⑥に代入して、$4a^2 + 4a(a\cos^2\theta - 2a) + 1 = 0$

$4a^2\cos^2\theta - 4a^2 + 1 = 0$

$4a^2\sin^2\theta = 1$　　$a = \pm\frac{1}{2s}$

(i) $a = \frac{1}{2s}$ のとき　⑦より $c = \frac{1}{2s}\cos^2\theta - 2\cdot\frac{1}{2s}$

$= \frac{1}{2s}(1-s^2) - \frac{1}{s}$

$= -\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)$

このとき、$f(x) = \frac{1}{2s}x^2 - \frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)$ だが、これは

$\sin\theta = f(\cos\theta)$ を満たさない。やってみて下さい。

(ii) $a = -\frac{1}{2s}$ のとき、(i)と同様に、$c = \frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)$ となり

$\sin\theta = f(\cos\theta)$ を満たす。

考察
計算量が多すぎて
現実的ではない。

よって、$a = -\frac{1}{2s}$　$c = \frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)$

解法3-3、3-2の途中で分岐（恒等式）

⑤ $a^2x^4 + (2ac+1)x^2 + c^2 - 1 = 0$ は

$a^2(x+\cos\theta)^2(x-\cos\theta)^2 = 0$

⇔ $a^2(x^2-\cos^2\theta)^2 = 0$ と因数分解できるはず。

つまり、

$a^2x^4 + (2ac+1)x^2 + c^2 - 1 = a^2(x^2-\cos^2\theta)^2$

は恒等式である。

(右辺) $= a^2(x^4 - 2\cos^2\theta\cdot x^2 + \cos^4\theta)$

$= a^2x^4 - 2a^2\cos^2\theta\cdot x^2 + a^2\cos^4\theta$　なので、係数を比較し

$\begin{cases} 2ac+1 = -2a^2\cos^2\theta \\ c^2 - 1 = a^2\cos^4\theta \end{cases}$　⇔ $2ac = -2a^2\cos^2\theta - 1$

×4a²　　代入

$4a^2c^2 - 4a^2 = 4a^4\cos^4\theta$

$(-2a^2\cos^2\theta - 1)^2 - 4a^2 = 4a^4\cos^4\theta$

$\cancel{4a^4\cos^4\theta} + 4a^2\cos^2\theta + 1 - 4a^2 = \cancel{4a^4\cos^4\theta}$

$4a^2(\cos^2\theta - 1) + 1 = 0$

$4a^2\sin^2\theta = 1$　　$a = \pm\frac{1}{2s}$　◀3-2と同じ結論。以下略

考察

3-2ほどではないけど、
これも計算量が多くて、
答案には使えないレベル。

解法3では、両方とも関数で計算しました。
解法4以降では、片方ずつ接線にしてみます。
違いを比較してみて下さい。

準備

点P $(\cos\theta, \sin\theta)$ における、放物線Cの接線mは $y=2a\cos\theta(x-\cos\theta)+\sin\theta$
円 Dの接線nは $(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$

解法 4-1　円の接線と放物線

($b=0$ をもとめたあとから。)

どっちも、接線と関数を連立 → (判別式)=0 → 重解 をもとめるだけ

$C:\ y=f(x)=ax^2+c$ と
$n:\ (\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$ とが、点P $(\cos\theta, \sin\theta)$ で接する。

$n:\ y=-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\dfrac{1}{\sin\theta}$ を、Cに代入

$$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{1}{\sin\theta}=ax^2+c$$

$$a\sin\theta x^2+\cos\theta\cdot x+c\sin\theta-1=0 \quad \cdots ⑧$$

$$D=(\cos\theta)^2-4a\sin\theta(c\sin\theta-1)=0$$

$$\cos^2\theta-4ac\sin^2\theta+4a\sin\theta=0$$

$$1-\sin^2\theta-4ac\sin^2\theta+4a\sin\theta=0$$

$$c=\frac{-\sin^2\theta+4a\sin\theta+1}{4a\sin^2\theta} \quad \cdots ⑨$$

⑧に代入して、

$$a\sin\theta x^2+\cos\theta\cdot x+\frac{-\sin^2\theta+4a\sin\theta+1}{4a\sin^2\theta}\times\sin\theta-1=0$$

$$a\sin\theta x^2+\cos\theta\cdot x+\frac{-\sin^2\theta+4a\sin\theta+1}{4a\sin\theta}-1=0$$

$$4a^2\sin^2\theta x^2+4a\sin\theta\cos\theta\cdot x-\sin^2\theta+\cancel{4a\sin\theta}+1-\cancel{4a\sin\theta}=0$$

$$4a^2\sin^2\theta x^2+4a\sin\theta\cos\theta x+\cos^2\theta=0$$

$$(2a\sin\theta x+\cos\theta)^2=0$$

$$\therefore\ (重解)=-\frac{\cos\theta}{2a\sin\theta}$$

(重解) $=\cos\theta$ なので (点Pで接する)　$\sin\theta=s$

$$\cancel{\cos\theta}=-\frac{\cancel{\cos\theta}}{2a\sin\theta} \qquad \therefore\ a=-\frac{1}{2s}$$

⑨に代入して

$$c=\frac{-s^2+4\times\left(-\frac{1}{2s}\right)\times s+1}{4\times\left(-\frac{1}{2s}\right)\times s^2}=\frac{-s^2-1}{-2s}=\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)$$

考察
やっぱり、コレも計算量が多い。

解法 4-2　放物線の接線と円

($b=0$ をもとめたあとから。)

$m:\ y=2a\cos\theta(x-\cos\theta)+\sin\theta$ と
$D:\ x^2+y^2=1$ とが、点P $(\cos\theta, \sin\theta)$ で接する。

mをDに代入する。

$$x^2+\{2a\cos\theta(x-\cos\theta)+\sin\theta\}^2=1$$

$$x^2+4a^2\cos^2\theta(x-\cos\theta)^2+4a\sin\theta\cos\theta(x-\cos\theta)+\sin^2\theta=1$$

$$(4a^2\cos^2\theta+1)x^2+(-8a^2\cos^3\theta+4a\sin\theta\cos\theta)x+4a^2\cos^4\theta-4a\sin\theta\cos^2\theta+\sin^2\theta-1=0 \quad \cdots ⑩$$

$$D/4=(-4a^2\cos^3\theta+2a\sin\theta\cos\theta)^2-(4a^2\cos^2\theta+1)(4a^2\cos^4\theta-4a\sin\theta\cos^2\theta+\underbrace{\sin^2\theta-1}_{-\cos^2\theta})=0$$

$$(-4a^2\cos^2\theta+2a\sin\theta)^2-(4a^2\cos^2\theta+1)(4a^2\cos^2\theta-4a\sin\theta-1)=0$$

$$\cancel{16a^4\cos^4\theta}-\cancel{16a^3\cos^2\theta\sin\theta}+4a^2\sin^2\theta-(\cancel{16a^4\cos^4\theta}-\cancel{16a^3\cos^2\theta\sin\theta}-\cancel{4a^2\cos^2\theta}+\cancel{4a^2\cos^2\theta}-4a\sin\theta-1)=0$$

$$4a^2\sin^2\theta+4a\sin\theta+1=0$$

$$(2a\sin\theta+1)^2=0$$

$$a=-\frac{1}{2s}$$

以下略

考察
4-1よりも計算量が多くてダメ。

接線を使ったら計算量が多くなって使えなかった。
最後に、接線同士が一致するという方針で。

解法5　接線同士が一致

$m:\ y=2a\cos\theta(x-\cos\theta)+\sin\theta$
$n:\ (\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$ の2つが一致

mを変形して、 $2a\cos\theta x-y-2a\cos^2\theta+\sin\theta=0$
nの(両辺)×2a　$2a\cos\theta x+2a\sin\theta y-2a=0$

$$\begin{cases}-1=2a\sin\theta\\ -2a\cos^2\theta+\sin\theta=-2a\end{cases} \qquad \therefore\ a=-\frac{1}{2s}$$

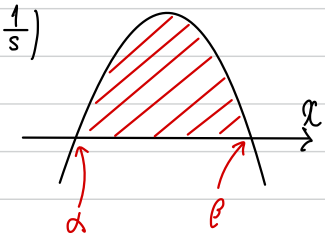
コッチは(結果的に)使わなかった。

考察
コレは計算量も少なく、カンタンだった。
ベストアンサーとして使って良い解法。

2024年　東大数学　文系第1問④

(2) a, b, cの値を代入して、

放物線C: $y=f(x)=-\frac{1}{2s}x^2+\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)$



$f(x)=0$ から、

$\frac{1}{2s}x^2=\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)$

$x^2=s\left(s+\frac{1}{s}\right)$

$=s^2+1$　　∴ $x=\pm\sqrt{s^2+1}$

$\alpha=-\sqrt{s^2+1}$　$\beta=\sqrt{s^2+1}$ とおく

よって、求める面積Aは

$$A=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$
$$=-\frac{1}{2s}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2s}(\beta-\alpha)^3$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2s}\left(2\sqrt{s^2+1}\right)^3$$
$$=\frac{2}{3s}(s^2+1)^{\frac{3}{2}}\ /\!/$$

(3) 解法1：2乗して大小比較

$\boxed{\text{方針の考察}}$

$A\geqq\sqrt{3}$ を示すが

$A=\frac{2}{3s}(s^2+1)^{\frac{3}{2}}$ と $\sqrt{3}$ の両方とも$\sqrt{\ }$がある。

よって、$A\geqq 0$ ($\sqrt{3}\geqq 0$) を示した上で、$A^2-3\geqq 0$ を示す。

$A=\frac{2}{3s}(s^2+1)^{\frac{3}{2}}>0$ (∵ $0°<\theta<90°$ で $s=\sin\theta>0$)

$\sqrt{3}>0$ より、

$A\geqq\sqrt{3} \Leftrightarrow A^2\geqq 3$ なので、$A^2-3\geqq 0$ を示す。

$$A^2-3$$
$$=\frac{4}{9s^2}(s^2+1)^3-3$$
$$=\frac{4(s^2+1)^3-3\times 9s^2}{9s^2}$$
$$=\frac{4s^6+12s^4+12s^2+4-27s^2}{9s^2}$$
$$=\frac{\boxed{4t^3+12t^2-15t+4}}{9t}$$

見やすくするため $s^2=t$ とおく　$0<t<1$

ココが0以上になればよい

$g(t)=4t^3+12t^2-15t+4$ とおく。

$0<t<1$ において、$g(t)\geqq 0$ となることを示す。

$$g'(t)=12t^2+24t-15$$
$$=3(4t^2+8t-5)$$
$$=3(2t-1)(2t+5)$$

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		↘	0	↗	

$g\left(\frac{1}{2}\right)=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+12\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-15\times\frac{1}{2}+4$
$=\frac{1}{2}+3-\frac{15}{2}+4=0$

増減表から、確かに $g(t)\geqq 0$

以上より $A\geqq\sqrt{3}$ が示された。

解法2 相加相乗を利用

$\boxed{\text{方針の考察}}$

$\frac{x^2+1}{x}$ など、分数関数には相加相乗が使えることがある。

$A=\frac{2}{3s}(s^2+1)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left(\frac{s^2+1}{s^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$ とすると、分数関数になる。

$$A=\frac{2}{3s}(s^2+1)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left(\frac{s^2+1}{s^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$\frac{2}{3s}(s^2+1)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left(\frac{s^2+1}{s^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$s=\left(s^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ とみてカッコの中へ

$s^{\frac{2}{3}}=t$ とすると、$(0<t<1)$

$t^3=\left(s^{\frac{2}{3}}\right)^3=s^2$ なので　$A=\frac{2}{3}\left(\frac{t^3+1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}$

($y=x^{\frac{3}{2}}$ は $x>0$ で単調増加なので)　書かなくてもよい

$\frac{t^3+1}{t}$ が最小の時にAも最小になる。

注　中身のMinと全体のMinが同時に起こることを指摘。これを書くことで中身だけ調べてよくなる

$$\frac{t^3+1}{t}=t^2+\frac{1}{t}$$
$$=t^2+\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t}$$

3文字の相加相乗を使って右辺を定数にするために、次数を調整

(3文字の)相加・相乗平均の関係から、

$$t^2+\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t}\geqq 3\times\sqrt[3]{\cancel{t^2}\times\frac{1}{2\cancel{t}}\times\frac{1}{2\cancel{t}}}$$

この変形のお蔭で$\sqrt{\ }$の中のtがキャンセルされる。

$$t^2+\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t}\geqq\frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}$$

等号成立は $t^2=\frac{1}{2t}=\frac{1}{2t}$

$t=\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}$ の時

$0<t<1$ を満たす。

今回はMinを示す必要はなく、大小を示せばよいので不要。

$$A=\frac{2}{3}\left(\frac{t^3+1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$\geqq\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$=\sqrt{3}$$

よって証明された。

解法3：実数解を持つ条件（逆像法）

方針の考察

分数関数の値域は、相加相乗が使えない場合でも、
「$=k$」とおき、等式にしたうえで、実数解を持つ条件（逆像法）を使うと求められる。

（解法2の途中から）

$0<t<1$ における $\frac{t^3+1}{t}$ の範囲を知るために、実数解を持つ条件を使う。（逆像法）

$\frac{t^3+1}{t}=k$ とおく（kは実数）

$t^3-kt+1=0$ として、tが実数解を持つ条件を調べる。

（$0<t<1$ かつ $t^3-kt+1=0$ となる実数tが存在する ⇔ kの値域）
制約条件　目的関数　逆像

$h(t)=t^3-kt+1$ とおくと　$h'(t)=3t^2-k$

(i) $k\leqq 0$ のとき　$h'(t)>0$ なので、$h(t)$は単調増加

t	(0)		(1)
$h'(t)$		$+$	
$h(t)$	(1)	$\nearrow$	

このとき、$h(t)=0$ は実数解を持たない。

(ii) $k>0$ のとき　$h'(t)=0 \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{\frac{k}{3}}$

t	(0)		$\sqrt{\frac{k}{3}}$		(1)
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$	(1)	$\searrow$		$\nearrow$	$(2-k)$

ココが負ならOK

増減表より、
$h(t)=0$ が実数解を持つ条件は、$h\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right)\leqq 0$

$$h\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right)=\left(\frac{k}{3}\right)^{\frac{3}{2}}-k\sqrt{\frac{k}{3}}+1\leqq 0$$

$$\frac{k}{3}\sqrt{\frac{k}{3}}-k\sqrt{\frac{k}{3}}+1\leqq 0$$

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot k^{\frac{3}{2}}+1\leqq 0$$

$$k^{\frac{3}{2}}\geqq\frac{3\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore\ k\geqq\frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{2}{3}}}$$

$k>0$ から、両辺 $\frac{2}{3}$ 乗する

以上から、kの値域は $k\geqq\frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{2}{3}}}$　◀解法2と同じ結論

以下略

解法4：tan で置換 からの置換

方針の考察

s^2+1 という式は、よく tan で置換する。$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ の公式で、変形が進む。
理系（数III）でよく使う技術ですが、文系の問題でもたまに有効。

$A=\frac{2}{3s}(s^2+1)^{\frac{3}{2}}$ において、$s=\tan\varphi$ とおく。

φの範囲は、$0°<\theta<90°$ から、$0<s<1$ なので、$0<\varphi<45°$　（$0<\varphi<\frac{\pi}{4}$ でも可）

$$A=\frac{2}{3\tan\varphi}\left(1+\tan^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{2}{3\tan\varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3\tan\varphi}\times\frac{1}{\cos^3\varphi}$$

$$=\frac{2}{3\sin\varphi\cos^2\varphi}=\frac{2}{3\sin\varphi(1-\sin^2\varphi)}$$

◀見通しのよい関数になった。

よって、Aの値域を知るには、$\sin\varphi(1-\sin^2\varphi)$ の値域がわかればよい。

$\sin\varphi=p$ とおくと、$\sin\varphi(1-\sin^2\varphi)=p(1-p^2)$ で

このままでは計算できないので、さらに置換

$0<\varphi<45°$ から　$0<p<\frac{1}{\sqrt{2}}$

$I(p)=p(1-p^2)$ とおくと　$I'(p)=-3p^2+1$ より

t	(0)		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

$I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}$

$I\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{2}{3}$

よって　$0<I(p)\leqq\frac{2}{3\sqrt{3}}$

$A=\frac{2}{3I(p)}$　なので、

$$A\geqq\frac{2}{3\times\frac{2}{3\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$$

よって示された。